Piet Groeneboom
Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
p.groeneboom@tudelft.nl

Column Piet grijpt zijn kans

Wortel min 1 bestaat niet!

Piet Groeneboom schrijft op regelmatige basis in dit blad een column, deze keer over een wonderbaarlijk boek, het vermoeden van Baudet en de stelling van Van der Waerden.

Onbestaanbare getallen

Derde klas middelbare school. De wiskundeleraar roept weer eens: "De wortel uit min 1 bestaat niet!" Ik roep: "De wortel uit min 1 bestaat wel, het is een imaginair getal!" (het zijn er natuurlijk in feite twee, i en $-i$). Er valt een stilte, waarna de wiskundeleraar zegt: "Let niet op Piet, hij wil geleerd doen. Voor jullie bestaat de wortel uit min 1 niet!" Hij volgde hier de Taoïstische spreuk: "Een wijs heerser maakt de hoofden van zijn onderdanen leeg en hun buiken vol." Hoewel hij natuurlijk over ons heerste, gedroeg hij zichzelf wat dit betreft als onderdaan van een groter heerser en werd daarom wel 'buikie' genoemd in de wandelgangen.

Ik had het niet kunnen accepteren. Wel kon ik accepteren dat wortel min 1 niet op de reële getallenlijn lag, maar waar lag wortel min 1 dan wel? Net zoals Hugo Brandt Corstius in zijn bedje lag na te denken over de stelling dat 'drie eerlijke lijnen' (waaronder hoogtelijnen, zwaartelijnen en bisectrices in een driehoek) door één punt gaan (zie [1]), lag ik in mijn bedje na te denken over waar dan toch die wortel uit -1 lag. In *Weten, Algemeen ontwikkelend maandblad* las ik toen een artikel over Gauss en complexe getallen. Een wereld ging voor mij open! Natuurlijk, het platte vlak! Dat ik daar zelf niet opgekomen was!

Het was niet mijn bedoeling geweest om geleerd te doen, ik kon dat "wortel -1 bestaat niet!" gewoon niet meer aanhoren. In de pauze legde ik het nog eens aan mijn klasgenoten uit, maar zij waren niet geïnteresseerd. Ach, waarom zou je moeilijk doen als onze wiskundeleraar nu eenmaal zei dat wortels uit negatieve getallen niet bestaan. Ik moest weer denken aan deze gebeurtenis van lang geleden bij het herlezen van het boek *Spelen met getallen* van Fred Schuh, dat ik onlangs weer antiquarisch heb kunnen aanschaffen. Schuh zegt hierover [7, p. 11]:

> "In elk geval is de benaming 'imaginair getal' heel wat beter dan 'onbestaanbaar getal'. Deze laatste naam, die vooral vroeger veel in ons land gebruikt werd — in het buitenland treft men een overeenkomstige naam niet aan — drukt iets geheel onjuists uit. De naam 'onbestaanbaar' stamt uit de tijd waarin men op het standpunt stond: 'Die getallen bestaan wel niet, maar je doet maar alsof ze er wel zijn.' [PG: Dit standpunt doet erg denken aan wat Marilyn vos Savant hierover had op te merken, zie mijn vorige column.] Een behoorlijke invoering van de complexe getallen, waarbij begonnen wordt met *wat ze zijn*, doet inzien dat imaginaire getallen wel degelijk bestaan."

Spelen met getallen

Spelen met getallen is een wonderbaarlijk boek. Ik las dit "fascinerende boek voor jong en oud" toen ik op de middelbare school zat (derde klas of zo) en ik weet niet meer hoe ik er toe kwam het te lezen. Ik las ook *Inleiding tot de logica* van Alfred Tarski, *Eén, twee, drie ... oneindig* van Gamow, *Drie eeuwen fysica* van Einstein en Infeld en een of ander boek van Max Born. Maar deze boeken maakten toch minder indruk op mij dan *Spelen met getallen* van Schuh. Ik denk dat dit kwam omdat ik toen wel de portee van wat Schuh zei kon begrijpen, maar niet de portee van bijvoorbeeld de vertrekkende treinen, gelijk gezette klokken, enzovoort, in het boek van Einstein en Infeld (als ik het me goed herinner) en de portee van de (ware) beweringen: "Als $2\times 2=5$, dan is New York een kleine (respectievelijk grote) stad" in Tarski's boek. Over het boek van Tarski heb ik trouwens later nog tentamen gedaan op een moment dat ik (hopelijk) de portee wel begreep.

Fred Schuh geeft een simultaan seance in het spel *Jumbo*, met oud-wereldkampioen schaken Max Euwe tegenover zich. De foto staat in *Spelen met getallen*, naast het titelblad.

Fred Schuh legt alles glashelder uit. Na zijn beschouwing over het nimspel gelezen te hebben, kon ik iedereen in mijn klas in dit spel verslaan (niemand wilde het daarom nog met mij spelen; ze hadden het boek van Schuh natuurlijk niet gelezen en bovendien waren hun hoofden leeggemaakt door onze wiskundeleraar).

Chris Zaal heeft het in [11] over Schuhs 'gortdroge stijl. Misschien was dat zo in zijn leerboeken, maar zeker niet in het boek *Spelen met getallen*. Als typerend voorbeeld van zijn stijl van schrijven geef ik hieronder een passage uit de sectie 'Grote getallen zonder achtergrond' [7, pp. 54–55].

> "Het is met eenvoudige hulpmiddelen mogelijk getallen neer te schrijven, waarbij weer 100^{100} als een kleinigheidje wegvalt. Zo is daar bijvoorbeeld:
>
> $$100^{100^{100}},$$
>
> waar dus 100 tot de macht 100^{100} verheven wordt, een getal zo groot dat men zich zelfs van het aantal nullen, waarmee het geschreven zou moeten worden als men dit volgens het aan ons allen bekende systeem deed, niet eens een voorstelling kan vormen. Dit aantal nullen is namelijk zelf een getal geschreven als 2 gevolgd door 200 nullen. En dan een kleine stap — wat je maar klein noemt, zul je zeggen — naar
>
> $$100^{100^{100^{100}}}.$$
>
> En toch kan van dit verbijsterende getal (ik weet het passende bijvoeglijke naamwoord niet) met het grootste gemak bewezen worden dat het bij deling door 13 rest 9 geeft. Wat kan mij die rest schelen, zul je zeggen; of er nu één meer of één minder overblijft, als we het met zijn dertienen gaan verdelen. Wij hebben er heus genoeg aan en zullen er geen ruzie om maken als er wat overschiet en niet ieder evenveel krijgt. Maar je hebt nu eenmaal van die rare mensen, wie het wel kan schelen wat ze als rest krijgen. Daarvoor hebben ze vernuftige methoden bedacht, alsof hun leven er van afhangt, alsof ze gehangen worden, als er een 7 uitkomt, en een koningskroon krijgen als het op 3 uitdraait. Maar ze krijgen noch de strop noch de koningskroon, want de rest is nu eenmaal 9, daaraan valt niets te veranderen.
> Je zult misschien vragen hoe ik dat zo weet van die rest 9..."

En dan volgt een (korte) volkomen duidelijke uitleg. Voor de aardigheid heb ik nog even geprobeerd wat Mathematica doet met dit probleem door

```
Mod[100^{100^{100^100}},13]
```

in te typen. Zoals verwacht kreeg ik het antwoord 'Overflow'. `Mod[100^100,13]` doet Mathematica nog wel goed (via onze server in Delft).

Het vermoeden van Baudet en de stelling van Van der Waerden

Ik 'zat eens aan' bij een zogenaamd Stieltjes-diner, waar iemand, laat ik hem 'Jan' noemen (de spelers in het boek van Fred Schuh heten ook Jan en Piet), zei: "Eigenlijk is Emmy Noether niet alleen de moeder van de algebra, maar ook de moeder van de Nederlandse statistiek." Waarom Jan dit zei weet ik niet, maar de gevolgen waren vreselijk. Een collega, die ik nu even 'Piet' zal noemen riep: "Hoe kom je daarbij?" Jan legde uit: "Emmy Noether was de inspiratrice van Van der Waerden, van Dantzig is gepromoveerd bij Van der Waerden, en een aantal Nederlandse statistici en kansrekenaars is gepromoveerd bij van Dantzig" Waarop Piet riep: "Belachelijk! Van der Waerden is nooit hoogleraar in Nederland geweest, waar heb je dat vandaan, Jan?" Jan antwoordde besmuikt dat hij dit had gelezen op de wiskundesite van de VU op internet. Hierna riep Piet: "Oh, op internet staat zoveel onzin! Van der Waerden was een eigenwijs ventje, die zich misschien alleen maar wilde voordoen als de geestelijke vader van Van Dantzig."

De personen die ook bij dit Stieltjes-diner waren, zullen zich deze gebeurtenissen ongetwijfeld nog herinneren en ook weten wie 'Jan' en 'Piet' eigenlijk waren. De volgende dag werd Gerard Alberts geraadpleegd, en ja, Van der Waerden was wel (kort) in Nederland hoogleraar geweest, en ja, van Dantzig was bij hem gepromoveerd.

De laatste tijd heb ik veel over Van der Waerden gelezen en het beeld dat door 'Piet' van hem werd opgeroepen strookt helemaal niet met het beeld dat ik inmiddels van hem heb. De versie van een lezing die Van der Waerden in 1963 op een herdenking van de sterfdag van Emil Artin in Hamburg heeft gehouden begint als volgt:

> "Artin, Schreier und ich gingen im Jahr 1926 öfter im Curio-Haus in Hamburg essen und unterhielten uns dabei über mathematische und andere Fragen. Einmahl erzählte ich ihnen über die Vermutung des früh verstorbenen holländischen Mathematiker Baudet. Sie lautete:
>
> *Teilt man die Gesamtheit der natürlichen Zahlen* $1, 2, \ldots$ *in zwei Klassen ein, so enthält mindestens eine dieser Klassen eine arithmetische Progression von* l *Gliedern, wobei* l *eine beliebig grosse vorgegebene Zahl ist.*
>
> Nach dem Essen gingen wir in Artins Zimmer im damaligen Mathematischen Institut an der Rothenbaumchaussee und überliegten uns gemeinsam vor der Wandtafel an Hand von kleinen Kreidezechnungen wie man wohl die Vermutung beweisen könnte. Wir stellten allerlei Überlegungen an und hatten ein paar Einfälle, die der Überlegung eine neue Richtung gaben und schliesslich zur Lösung führten."

Han Baudet was de overgrootvader van de momenteel veel in het nieuws zijnde politicus Thierry Baudet. Hij is reeds op 30-jarige leeftijd overleden. Kennelijk was hij niet alleen een begaafd wiskundige maar ook nog een begaafd musicus. Zijn wiskundige leermeester was Fred Schuh en Fred Schuh had hem aangeraden zijn vermoeden aan Van der Waerden voor te leggen.

Ik zal nu even kort de essentie van het bewijs van Van der Waerden in [9] proberen uit te leggen, gebruikmakend van de manier waarop Van der Waerden het zelf ook uitlegt in [10] in de situatie waarin er twee klassen zijn ($k = 2$) en de lengte van de rekenkundige rij gelijk is aan 3 ($l = 3$).

We stellen ons voor dat twee spelers, Jan en Piet, de natuurlijke getallen rood en blauw willen kleuren, waarbij Piet een rekenkundig rijtje van drie getallen van dezelfde kleur probeert te maken en Jan dat probeert te voorkomen. Zowel Jan als Piet mogen van beide kleuren gebruikmaken en ze zijn om de beurt 'aan zet'.

Dit is een spel dat Jan altijd zal verliezen. Zoals dat bij veel spelen gaat, is het verstandig om de eindsituatie, waarbij Jan zich in een verliezende positie bevindt te bekijken. Zo'n mogelijke eindsituatie wordt getoond in Figuur 1 (Figuur 3 uit [10]).

Niet dat het er iets toe doet, maar voor mijn afscheidsrede die in hetzelfde nummer van NAW staat als het artikel [4] van K. P. Hart over de stelling van Van der Waerden, heb ik precies zulke plaatjes zitten maken, maar deze keer heb ik gewoon een screenshot van Figuur 3 in [10] genomen. Ik had het in mijn afscheidsrede [3] ook over de stelling van Van der Waerden en de resultaten van Szemerédi en Green en Tao, omdat ik daar net in Seattle drie lezingen van Timothy Gowers over had bijgewoond en daardoor buitengewoon enthousiast over dit onderwerp was geworden.

En nu ik het daar toch over heb, moet ik nog eens Derk Pik bedanken voor de mooie collages die hij geheel ongevraagd bij mijn afscheidsrede heeft gemaakt en mijn toenmalige buurman Hans Marcelis (rector van het categoriaal(!) Stedelijk Gymnasium Utrecht), voor de titel 'Summa cogitatio', wat de Latijnse vertaling is van 'Topdenken'. Ik wilde namelijk niet achterblijven bij mijn geleerde collega's en mijn afscheidsrede voor de grap een deftige Latijnse titel geven. Met andere woorden: "Ik wilde geleerd doen!" Iemand vroeg zich nog af of 'Het topdenken' niet de titel van een (Bommel-)boek van Marten Toonder was. Dat had inderdaad heel goed gekund, maar zover ik weet is het niet het geval.

Ter zake! Het eerste blok in Figuur 1 representeert een zogenaamde 'pre-monochrome' rekenkundige rij van lengte 3, bijvoorbeeld $\{1,3,5\}$ waarbij 1 en 3 dezelfde kleur hebben in een blok van 5 opvolgende natuurlijke getallen. De twee horizontale lijnstukjes in de blokken representeren de twee kleuren en de dwarsstreepjes de getallen 1, 3 en 5. Stel bijvoorbeeld dat het bovenste lijnstuk binnen het blok de kleur rood representeert en het onderste lijnstuk binnen het blok de kleur blauw, dan geeft het eerste blok in dit geval de situatie 1 en 3 rood, 5 blauw, weer.

De term 'pre-monochrome' ontleen ik aan [4]. Een monochrome rekenkundige rij van 3 getallen is ook een pre-monochrome rij. Het gaat erom dat de twee eerste getallen monochroom zijn; als we een monochrome rekenkundige rij van 3 getallen hebben, heeft Piet natuurlijk al gewonnen. In 5 opvolgende getallen kunnen we altijd een pre-monochrome rij vinden en er zijn $32 = 2^5$ mogelijke configuraties met betrekking tot de kleurverdeling. We laten ook toe dat alle 5 getallen van dezelfde kleur zijn. Dit betekent dat als we 33 blokken van dit type bekijken, er (minstens) twee dezelfde configuratie hebben. Dit heet in het Engels het 'pigeonhole principle' en in het Duits 'Schubfachprinzip'.

Het kan natuurlijk zijn dat deze twee blokken al een monochrome rij van 3 getallen bevatten, en dan zijn we klaar, dus we bekijken alleen de situatie dat er in de twee blokken een premonochrome rij voorkomt zoals getoond in de eerste twee blokken van Figuur 1. Het derde blok toont dan de verliezende positie van Jan. Als we het tweede blok namelijk naar rechts verschuiven over een afstand gelijk aan de afstand tussen het eerste en tweede blok (die dus hoogstens 32 blokken is) krijgen we het derde blok.

Of Jan of Piet nu aan zet is in de positie met de twee kruisjes geeft niet, in beide gevallen kan het ontstaan van een rekenkundige rij van lengte 3 niet voorkomen worden. Als in het derde blok voor a wordt gekozen ontstaat de monochrome rekenkundige rij aaa, als voor b wordt gekozen de monochrome rekenkundige rij bbb. Merk op dat in het derde blok de twee eerste dwarsstreepjes niet betekenen dat Jan of Piet hier hun zetten hebben gedaan.

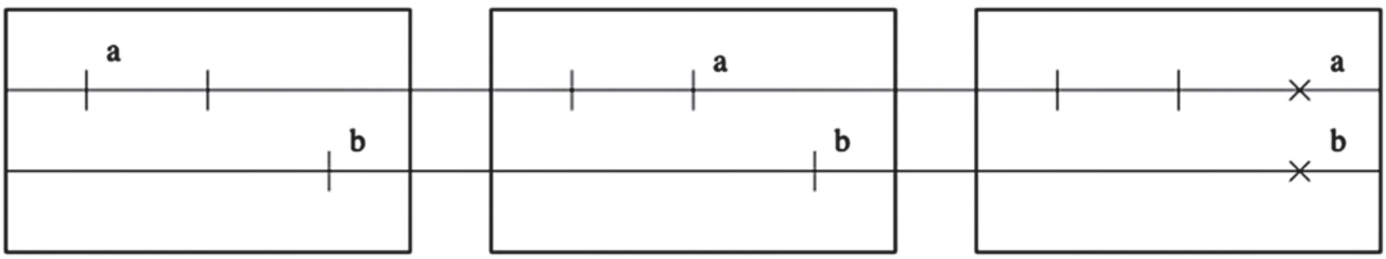
Van der Waerden zegt op dit punt van zijn voordracht:

> "Dieser Beweis galt zunächst für den bereits früher erledigten Fall $k = 2$ [PG: twee klassen/kleuren], $l = 3$ [PG: lengte rekenkundige rij]. Trotzdem hatte ich, als ich ihn vorbrachte, das sichere Gefühl, nun den allgemeinen Beweis in Handen zu haben."

Tot slot

Alexander Soifer zegt in [8]: "Van der Waerden did not originally think much of his 1927 theorem and published it in an obscure little read Dutch journal." Dit 'obscure little read Dutch journal' was ons eigen *Nieuw Archief voor Wiskunde*! Maar toen kwam het boek *Three Pearls of Number Theory* [6] van Khinchin (er waren eerdere edities in het Russisch en Duits), waar de 'Stelling van Van der Waerden' een van de drie parels van de getaltheorie genoemd werd en begon Van der Waerden positiever te denken over zijn eigen bijdrage (volgens Soifer). Hoe een auteur denkt over de waarde van zijn eigen werk komt vaak niet overeen met hoe anderen hierover denken en dat kan twee kanten opgaan!

Aan het eind van [10] zegt Van der Waerden: "Jetzt habe ich Ihnen alles erzählt, was mir von jener denkwürdigen Stunde, in der



Figuur 1 Figuur 3 uit [10].

wir drei gemeinsam eine 'Perle' gefunden haben, noch in Erinnerung ist. Es war eine meiner schönsten Stunden." Het is bijzonder hoe Van der Waerden hier uit de doeken doet wie wat bedacht heeft, zo gaat het toch vaak niet. Ook is in [8] nog een opmerkelijke brief van Van der Waerden aan Artin te lezen, waarin hij zijn herinneringen voorlegt aan Artin, die dan antwoordt dat hij het zich ongeveer ook zo herinnert (maar een minder goed geheugen heeft dan Van der Waerden).

Er zijn nog wat gaten tussen het vermoeden van Baudet ("Bij het verdelen van de natuurlijke getallen in twee klassen bevat in ieder geval één klasse een rekenkundige rij van willekeurige (eindige) lengte") en de stelling van Van der Waerden, die zegt dat er een kleinste getal $W(k,l)$ is (het zogenaamde *Van der Waerden getal*), zodat bij elke verdeling van de getallen $1,2,\ldots,W(k,l)$ in k klassen een rekenkundige rij van lengte l in één van de klassen ligt. De meeste Van der Waerden getallen zijn onbekend, maar bijvoorbeeld $W(k,2)=k+1$, want een monochrome rekenkundige rij van lengte 2 correspondeert gewoon met twee getallen met dezelfde kleur (zelfde klasse) en het pigeonhole principle geeft ons dan het resultaat. Ook weten we dat $W(2,3)=9$. Het getal 8 is in dit geval te klein. K.P. Hart geeft in [4] het voorbeeld $\{1,3,6,8\}$, $\{2,4,5,7\}$ voor een verdeling in twee klassen zonder rekenkundige rij van lengte 3 in één van de klassen.

K.P. Hart dicht in [4] gedeeltelijk het gat door in feite de stelling van Tychonoff ("het product van compacte ruimten is compact") aan te roepen. Dat is wel een interessante kwestie, waar ik even met hem over van gedachten heb gewisseld. De stelling van Tychonoff is van later datum dan het artikel van Van der Waerden [9]! Kelley zegt in [5] over de stelling van Tychonoff: "It is probably the most important single theorem of general topology." Een sterke bewering! Hij geeft twee bewijzen, een klassiek bewijs met het lemma van Alexander en een bewijs dat aan Bourbaki wordt toegeschreven. Allebei de bewijzen maken gebruik van het lemma van de statisticus Tukey (volgens K.P. Hart een afvallig topoloog).

Het Curio-Haus in Hamburg

Timothy Gowers heeft in [2] een bovengrens gegeven voor het Van der Waerden getal:

$$W(k,l) \leq 2^{2^{k^{2^{2^{l+9}}}}}.$$

Het doet een beetje denken aan de grote getallen van Fred Schuh.

Het Curio-Haus in Hamburg, waar Van der Waerden met Artin en Schreier ging eten voordat ze aan het vermoeden van Baudet begonnen te werken op Artins kamer in het instituut, bestaat nog steeds: www.curiohaus.de.

Referenties

1 Hugo Brandt Corstius, Drie eerlijke lijnen snijden elkaar in één punt, *NRC*, 25 januari, 1996.

2 W.T. Gowers, A new proof of Szemerédi's theorem, *Geom. Funct. Anal.* 11(3) (2001), 465–588.

3 Piet Groeneboom, Summa Cogitatio, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8(2) (2007), 119–125.

4 Klaas Pieter Hart, De stelling van Van der Waerden, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 58(2) (2007), 92–97.

5 John L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company, 1955.

6 A.Y. Khinchin, *Three Pearls of Number Theory*, Graylock Press, 1952.

7 Fred Schuh, *Spelen met getallen*, Thieme, 1951.

8 Alexander Soifer, *The Scholar and the State: In Search of van der Waerden*, Springer, 2015. With forewords by Dirk van Dalen, James W. Fernandez, Branko Grünbaum, Peter D. Johnson, Jr. and Harold W. Kuhn.

9 Bartel Leendert van der Waerden, Beweis einer Baudetschen Vermutung, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 2/15 (1927), 212–216.

10 Bartel Leendert van der Waerden, Wie der Beweis der Vermutung von Baudet gefunden wurde, *Elem. Math.* 53(4) (1998), 139–148.

11 Chris Zaal, Wiskunde en alcohol (2014), https://www.slideserve.com/rufus/wiskunde-en-alcohol.