ZELFORGANISATIE

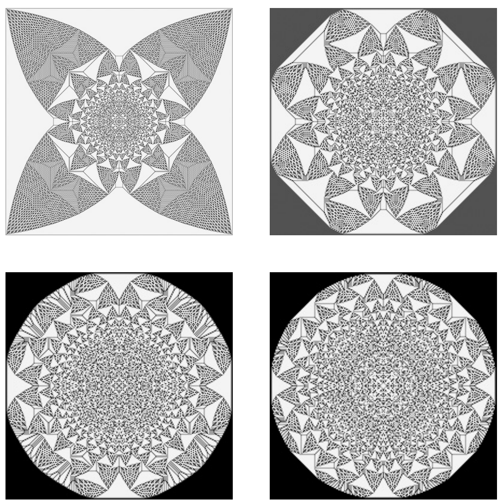
BEELDHOUWEN IN EEN WISKUNDIG ONDERZOEK

ANNE FEY

In de mathematische fysica worden fysische verschijnselen met wiskundige modellen bestudeerd. Een voorbeeld is de studie van zandhoopmodellen. Naast hun natuurkundige toepassing zijn zandhoopmodellen ook wiskundig interessant, omdat ze allerlei vormen van zelforganisatie vertonen. Op dit gebied is nog veel te ontdekken.

In tegenstelling tot wat de naam doet vermoeden, zijn zandhoopmodellen geen modellen voor het gedrag van zand. Ze zijn geïntroduceerd om *self-organized criticality* te bestuderen. Per Bak *(How nature works, 1999)* gebruikt deze term voor het opmerkelijke gedrag van bijvoorbeeld tektonische platen, beurskoersen, verkeer op de snelweg: het lijkt erop dat deze systemen bij voorkeur op scherp staan, een kleine verstoring kan willekeurig grote gevolgen hebben. Dit komt tot uiting in de statistiek van deze gevolgen. Bij de tektonische platen is er een maat voor de grootte van aardbevingen, namelijk de magnitude op de schaal van Richter. Het aantal aardbevingen als functie van de magnitude volgt een machtswet. Die ziet eruit als een rechte lijn in een dubbellogaritmisch plot. Bij het tweede voorbeeld kijken we naar fluctuaties in de beurskoersen, bij het derde naar de lengte van files. Bij beide treden opnieuw machtswetten op. De term criticality duidt op deze machtswetten, self-organized verwijst naar het hardnekkig blijven optreden van criticality ondanks allerlei pogingen tot ingrijpen. Als het verkeer op snelwegen werkelijk self-organized critical is, is de roep om meer asfalt weinig zinvol.

Tijdens mijn natuurkundestudie was ik het onderwerp zelforganisatie al eerder tegengekomen bij mijn afstudeerwerk met lasers. Laserlicht is een speciale lichttoestand: waar uit een lichtbron normaal gesproken onafhankelijke fotonen met ieder een willekeurige fase komen, zijn de fotonen van laserlicht een samenwerkend geheel met een collectieve fase. Mijn diodelaser werkte op elektrische stroom door halfgeleidermateriaal. Het licht ontstaat op dezelfde manier als in een LED, maar in de laser wordt bovendien een deel van het licht heen- en teruggereflecteerd door de geslepen zijkanten van het halfgeleidermateriaal. Dit, en het opvoeren van de stroom, zorgde voor de lasertransitie: vanaf een bepaalde stroomsterkte veranderde het LED-licht plotseling in laserlicht. Beide lichttoestanden worden beschreven in de quantummechanica, maar hoe weten die fotonen dat? Self-organized criticality is nog wonderlijker: als de laser self-organized critical zou zijn, regelde hij zelf de stroom naar de transitiewaarde, ook als ik hem af en toe op de verkeerde waarde zou zetten. Want het is bij zo'n transitie tussen twee opvallend verschillende soorten gedrag, of fase-overgang, waar criticality en de bijbehorende machtswetten optreden.



BEREKENINGEN VAN ZANDHOOPMODELLEN *ILLUSTRATIES: ANNE FEY*

ZANDHOOPMODELLEN

Terug naar de wiskunde. Een voorbeeld van een zandhoopmodel. Op een n bij n vierkant van punten heeft ieder punt een beginhoogte. Dat is een getal dat 0,1,2 of 3 kan zijn. Je zou deze hoogte ook 'aantal zandkorrels' kunnen noemen. Deze hoogtes gaan veranderen in de tijd: iedere tijdstap komt er een zandkorrel bij op een willekeurig punt. Op een zeker moment zal dan een van de hoogtes meer dan 3 worden. Zo'n punt heet instabiel; een instabiel punt moet meteen ieder van zijn vier buren een zandkorrel geven, zijn eigen hoogte neemt dan met 4 af. Ligt het punt aan de rand, dan verdwijnt er zand over de rand. Het kan zijn dat hierdoor een of meerdere buren ook instabiel worden, die moeten dan ook meteen zand aan hun buren gaan geven. De volgende tijdstap kan pas beginnen als alle punten weer stabiel zijn. Dit zandhoopmodel is self-organized critical op de volgende manier: onafhankelijk van met welke hoogtes je begint, je vindt altijd na verloop van tijd een toestand waarin het toevoegen van een zandkorrel willekeurig veel hoogtes kan veranderen, met opnieuw een machtswet (bij benadering; het klopt beter naarmate n groter is) voor het aantal hoogtes dat verandert.

In alle zandhoopmodellen is het zo dat er een maximaal toegestane hoogte is, en dat punten die teveel zand hebben, dit moeten uitdelen aan hun buren. Maar het aantal buren hoeft niet 4 te zijn, de toevoeging hoeft niet precies 1 korrel te zijn, het zand hoeft niet naar alle buren te gaan, enzovoorts: er zijn talloze varianten mogelijk. Ik ben er in mijn onderzoek gaandeweg achter gekomen dat zandhoopmodellen, naast self-organized criticality, nog veel meer fascinerende vormen van zelforganisatie vertonen. In alle gevallen van zelforganisatie is er sprake van een zekere verwondering: er ontstaat spontaan meer orde, een hogere structuur, dan je a priori zou verwachten. Zoals ik ondervonden heb, doet nadere bestudering van zelforganisatie hier, gelukkig, niets aan af.

OPENPRUTSEN

Toen ik natuurkunde ging studeren, had men het af en toe over de typische natuurkundige. Dat was iemand die vroeger zijn wekker openprutste om te zien hoe hij werkte. Dat verontrustte mij. Ik had nooit de behoefte gehad om mijn wekker open te prutsen, vond het veel mooier om het mysterie in stand te houden. Gelukkig ontdekte ik gaandeweg dat deze opvatting de studieresultaten niet negatief hoeft te beïnvloeden, en dat liefhebbers van mysteries ruimschoots aan hun trekken komen bij natuurkunde. Hoe verder ik kwam, hoe mooier het werd: ons universum blijkt, als je het openprutst om te zien hoe het werkt, te bestaan uit deeltjes die in een superpositie van verschillende toestanden kunnen zijn, deeltjes die louter bestaan als afwezigheid van een ander deeltje, informatie die sneller dan het licht reist, plasma's waarin verschillende deeltjes een verschillende temperatuur kunnen hebben, soms zelfs een negatieve... In de wiskunde creëert men zijn eigen universum, en prutst het vervolgens naar hartelust open. De mogelijkheden zijn eindeloos. Wie zelforganisatie zoekt, en daarvoor bij zandhoopmodellen begint, die vindt.

Het mooiste voorbeeld op dit gebied vind ik nog steeds de volgende speciale variant: het zandhoopmodel als groeimodel. Opnieuw op een vierkant van punten, zijn deze keer de beginhoogtes allemaal precies gelijk, en de toevoegingen uitsluitend op het middelste punt. Het zand spreidt zich dan gaandeweg uit. We kiezen het vierkant groot genoeg zodat het zand de rand niet bereikt. Een plaatje met 4 verschillende tinten voor de mogelijke hoogtes laat zien dat er dan prachtige patronen ontstaan. Merkwaardig genoeg is over deze patronen bijna niets bewezen. Het is bijvoorbeeld nog onbekend of ze werkelijk fractaal zijn – zo zien ze er wel uit – en of er een limietpatroon bestaat. Dat wil zeggen: stel dat we oneindig lang doorgaan met toevoegingen doen, en intussen de schaal van de figuur verkleinen, kan dat zodanig dat we op den duur niets meer zien veranderen? Dan is dat het limietpatroon.

Quasi-units

Tijdens mijn onderzoek hebben wij gewerkt aan de limietvorm van de figuren, de buitenkant dus; zelfs daar was nog bijna niets over bekend, laat staan bewezen. We hebben het groeimodel iets algemener gemaakt: inplaats van een vierkant nemen we een d-dimensionale kubus, en de beginhoogtes mogen ook negatief zijn. Punten met negatieve hoogte gedragen zich als een kuiltje dat eerst opgevuld moet raken. Voor beginhoogte 2d-2 hebben we bewezen dat de limietvorm een kubus is, en voor de andere hoogtes dat de vorm tussen twee bollen ligt die dichter bij elkaar komen naarmate de beginhoogte afneemt. Dit werk was goed voor een publicatie, en dus een hoofdstuk in mijn proefschrift.

Een andere vorm van zelforganisatie vond ik in Zhang's zandhoopmodel. In dit model zijn er geen discrete zandkorrels. Een toevoeging is een hoeveelheid zand, die iedere willekeurige waarde kan hebben tussen 0 en 1. Een punt wordt instabiel als de hoogte 1 of groter is geworden, het moet dan meteen zijn hele hoogte in gelijke porties over de buren verdelen. Ligt het punt aan de rand, dan verdwijnt er zand. In dit model kan, na verloop van tijd, een punt in principe elke hoogte tussen 0 en 1 hebben, in tegenstelling tot het model waar de hoogtes alleen 0,1,2 of 3, konden zijn. Maar uit numerieke simulatie van Zhang's model op een groot vierkant blijkt dat de hoogtes vrijwel alleen dicht bij 4 verschillende, equidistante waarden tussen 0 en 1 liggen. Zhang noemde dit *quasi-units*. Wij wilden die quasi-units begrijpen, maar omdat het model nog niet wiskundig bestudeerd was, zijn we begonnen met het ééndimensionale model, waar de punten op een lijn liggen. Behalve hoogte 0 is er dan maar 1 quasi-unit. Bovendien had het voordelen om de toevoegingen tussen 1/2 en 1 te kiezen. Eenvoudig was het nog steeds niet. Maar na vele maanden denken, discussiëren en voortdurend Zhang's model in mijn hoofd afspelen, lag er een publicatie waarin voor het model in één dimensie het bestaan van de quasi-unit bewezen werd. Het was mooi werk.

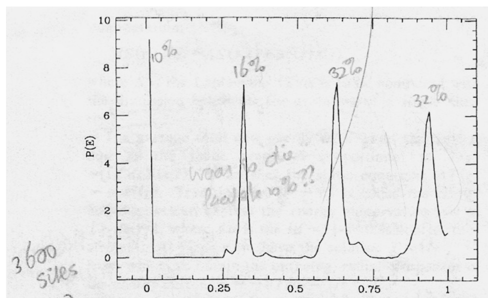


FIG. 1. The energy distribution of a single node $P(E)$ in critical states, for a 60×60 square grid. It is obtained by averaging over all the nodes of the system and over a long time interval. Input energy was chosen continuously between 0 and δ $(=\frac{1}{2})$ to avoid possible artificial influence by the input amount. All energy values can be approximately packed into four peak values. In ascending order, they represent roughly 10%, 16%, 32%, and 32% of the total nodes, respectively. The nodes of the last three values are colored by green, blue, and red in Fig. 2.

Quasi-units – uitvoerig bestudeerde illustratie uit Scaling theory of self-organized criticality *van Y.-C. Zhang*

Inspiratie

Het valt mij op dat de manier van werken van een wiskundige vergelijkbaar is met die van een kunstenaar. Net als een kunstenaar kan een wiskundige niet zonder inspiratie. Het plaatje van de numerieke simulatie van Y.-C. Zhang's model (Phys. Letters 63(5): *Scaling theory of self-organized criticality,* p. 470-473), met de vier overtuigende quasi-units, liet mij ruim twee jaar lang niet los tot we het bewijs rond hadden. Net als een kunstenaar wil een wiskundige iets maken dat origineel is en schoonheid heeft. Het opstellen van bewijzen is voor mij als beeldhouwen: beetje bij beetje krijgt het argument gestalte, terwijl we ijverig overbodige stappen schrappen, te ingewikkelde formuleringen vervangen door eenvoudigere, een figuur toevoegen ter verheldering, een voorwaarde vervangen als we plotseling inzien dat ons bewijs algemener geldt dan we dachten, en af en toe een stap achteruit doen om te zien of het af is. En als het af is, is het idee voor het volgende project er alweer.

Nieuw onderzoek

Na mijn promotie nog steeds als wiskundig onderzoeker werkzaam bij de Technische Universiteit Delft, ben ik met weer een nieuw aspect van zelforganisatie in een zandhoopmodel bezig. Het gaat nu om een *fixed-energy model:* er zijn geen toevoegingen, en er kan geen zand over de rand vallen. Laten we zeggen dat de punten weer een n bij n vierkant vormen. We beginnen met willekeurige aantallen zandkorrels op elk punt. Dan gaat de tijd lopen: iedere tijdstap inventariseren we welke punten instabiel zijn, en laten we die punten ieder een zandkorrel aan elk van hun buren geven. Ligt een punt aan de rand, dan fungeert het punt precies aan de overkant als buur. Als de totale hoeveelheid zand niet te groot is, zal het zich al gauw over de punten verdeeld hebben en dan komt het model tot rust. Maar als we met meer zand beginnen, kan het zijn dan er geen eind komt aan het herverdelen van zand. Na een poosje zie je dan steeds herhaling van dezelfde toestand, ofwel: het model wordt periodiek. De zelforganisatie die dit model vertoont, is dat dit model een verbazende voorkeur heeft voor opvallend korte periodes. Stel, we beginnen met 3 a 4 zandkorrels per punt. We verdelen dit zand willekeurig over de punten, en laten vervolgens de tijd lopen. Vrijwel zeker zien we dan na een poosje dat ieder punt afwisselend stabiel en instabiel wordt: de periode is dan 2. Ook periode 4 komt veel voor, en periode 6, enzovoorts. Periode 3 is veel zeldzamer. Het valt mij op dat de voorkeurperiodes overeenkomen met de lengte van *self-avoiding polygons:* als een zandkorrel een wandelingetje van punt tot punt maakt, alleen naar buren stappend, dan kan hij terug op zijn vertrekpunt zijn na 2 stappen, na 4 stappen, enzovoorts, maar niet na 3. Dat is beslist een nuttige observatie. Ik zie nog meer patronen: zo valt het me op dat ieder punt pas weer opnieuw instabiel wordt nadat al zijn buren dat geweest zijn.

Dit soort constateringen maken komt overeen met het maken van schetsen, en het klaarleggen van gereedschap. Mijn doel is een nieuwe serie bewijzen. Die zullen nieuw inzicht geven in de zelforganisatie van dit zandhoopmodel, maar bovenal weer prachtig worden.

Dr. ir. A.C. Fey-den Boer promoveerde afgelopen voorjaar aan de Vrije Universiteit in kansberekening op wiskundige zandhoopmodellen. Haar proefschrift Sandpile models *is via het internet te vinden op http://dare.ubvu.vu.nl/handle/1871/11714.*